Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2021)

Guías de Trabajos Prácticos

Primera parte. Versión 1.2 [En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Glosario de símbolos

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso.

: “Siga siga”. Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

: Solo para artesanos. Estos ejercicios son de naturaleza teórica y exigen un buen dominio del arte y una cuota de imaginación.

: Oráculo. Proporciona pistas y sugerencias para resolver algunos ejercicios. A veces, propone una situación.

. El ejercicio requiere utilizar una máquina.

Guía 1

Preliminares y notación

En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, se utiliza la siguiente notación:

1. $\mathbb{N}$ denota el conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de todos los números enteros,
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
3. $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto de todos los números enteros no negativos,
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$
4. $\mathbb{R}$ denota el conjunto (cuerpo) de todos los números reales.
5. $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de números reales no negativos, y $\mathbb{R}^+_*$ el conjunto de los números reales positivos.
6. $\mathbb{C}$ denota el conjunto (cuerpo) de todos los números complejos. Por definición $z \in \mathbb{C}$ si, y sólo si $z = a+ib$, donde $i^2 = -1$ y $a, b \in \mathbb{R}$. La expresión $\bar{z} = a-ib$ se utiliza para designar al conjugado de z. Obsérvese que $z + \bar{z} = 2a$ y que $z - \bar{z} = i2b$. La *fórmula de Euler* establece que
$$e^z = e^{a+ib} = e^a \left(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)\right).$$
7. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}_n$ denota el conjunto $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Nótese que $\{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ denota el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son $x_1, x_2, \dots, x_n$.
8. Dado un conjunto no vacío $\mathbb{I}$, $\{x_i : i \in \mathbb{I}\}$ denota el conjunto cuyos elementos están indexados por el conjunto $\mathbb{I}$.
9. Salvo que se diga lo contrario, las letras i, j, k, l denotan índices en algún subconjunto de $\mathbb{N}$, n y m denotan números naturales, u, v, w, x, y denotan vectores, A, B, C denotan matrices.
10. $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.
11. $\mathbb{K}^{m\times n}$ denota el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Para denotar las entradas de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se utilizan las notaciones $A = [A_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_m\\ j\in\mathbb{I}_n}}$ o $A = [a_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_m\\ j\in\mathbb{I}_n}}$.
12. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se denota por $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ a su matriz traspuesta, definida por $A^T_{ij} := A_{ji}$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $j \in \mathbb{I}_m$.
13. El símbolo
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
se llama *delta de Kronecker*
14. La matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra entrada, $\mathbf{I} := [\delta_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n\\ j\in\mathbb{I}_n}}$, se llama *la matriz identidad de orden n.*

15. $\mathbb{K}^n$ denota el conjunto de todas las matrices de $n \times 1$ con entradas en $\mathbb{K}$: $x \in \mathbb{K}^n$ si, y sólo si
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$
para algunos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.
16. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Las columnas de A se pueden pensar como elementos de $\mathbb{K}^m$ y las filas de A como elementos de $\mathbb{K}^n$. La notación $A_{i*} \in \mathbb{K}^n$ se utiliza para denotar la i-ésima fila de A, y la notación $A_{*j} \in \mathbb{K}^m$ para denotar la j-ésima columna de A.
17. El conjunto $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ cuyos elementos están definidos por $e_j := \mathbf{I}_{*j}$ se denomina *la base canónica de* $\mathbb{K}^n$.
18. Dado un intervalo I de la recta real, $C(I)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $C^n(I)$ denota el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son n-veces derivables y cuyas derivadas sucesivas son continuas hasta el orden n inclusive. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, se designa por $C^\infty(I)$, es decir, $C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.
19. $\mathbb{K}[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$: $p \in \mathbb{K}[x]$ si, y sólo si, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y algunos $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
20. El grado del polinomio $0 \in \mathbb{K}[x]$ es $-\infty$.
21. $\mathbb{K}_n[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ cuyo grado no supera n.

Ejercicios

1.1 Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^+_*$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si la suma vectorial $\oplus$ y la multiplicación escalar $\odot$ se definen por

$$\begin{aligned} v \oplus w &:= vw, \\ a \odot v &:= v^a. \end{aligned}$$

Verificar que $(\mathbb{V}, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde 1 es el vector cero y v^{-1} es el vector opuesto de v.

: *repasar la definición axiomática de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

1.2 Verificar las siguientes afirmaciones.

(**a**) El conjunto $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & a\end{bmatrix}^T : a \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(**b**) El conjunto $\left\{\begin{bmatrix} a+b & 0 & a\end{bmatrix}^T : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(**c**) El conjunto $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(**d**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{\sum_{k=0}^n a_k x^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

(**e**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones

$$\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] : a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}\right\}$$

es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

: *observar que la morfología de todos esos conjuntos es la misma:*

$$\left\{\sum_{j=1}^n c_j v_j : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\right\},$$

donde $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Será verdad que el conjunto $\left\{c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}^T + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1\end{bmatrix}^T : c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+\right\}$ es un subespacio?

1.3 Sean a y b dos números reales, arbitrarios pero fijos. Comprobar que los conjuntos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ definidos por

$$\mathcal{G}_1 := \{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\} \text{ y } \mathcal{G}_2 := \left\{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\right\}$$

generan el mismo $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

: *recordar la fórmula de Euler.*

1.4 Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(**a**) Comprobar que $B \in \operatorname{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3.

(**b**) Hallar una sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T : x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \right\}.$$

(**c**) Representar cada una de las matrices A_i como una combinación lineal de las otras dos.

(**d**) Comprobar que para cada pareja $i, j \in \mathbb{I}_3$ tal que $i \neq j$ se verifica que

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{gen}\{A_i\} \subsetneq \operatorname{gen}\{A_i, A_j\} = \operatorname{gen}\{A_1, A_2, A_3\}.$$

1.5 Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V} \setminus \{0\}$. Sabiendo que $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$ y $2v_1 + v_3 - v_4 = 0$, hallar todos los subconjuntos de $\mathcal{G}$ que pueden ser un sistema de generadores minimal del subespacio generado por $\mathcal{G}$.

1.6 En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio $\mathbb{S}$ mediante un sistema de generadores minimal.

(**a**) $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$.

(**b**) $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0 \right\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(**c**) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$.

(**d**) $\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0, \int_{-1}^{1} xp(x)dx = 0 \right\}$.

(**e**) $\mathbb{S} = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0 \}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.7 [*miniatura*] Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{V}$. Probar que $\mathcal{G}$ es un sistema minimal de generadores de $\mathbb{V}$ si, y sólo si, $\mathcal{G}$ es linealmente independiente.

: *¿qué significa que $\mathcal{G}$ sea un sistema de generadores que no es minimal?*

1.8 [*herramienta*] Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\{v_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$. Mostrar que $\{w_i : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

1.9 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{V}$ y se definen w_1, w_2, w_3, w_4 mediante

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4, \\ w_2 &:= -4v_1 - 2v_2 + v_4, \\ w_3 &:= 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4, \\ w_4 &:= 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4. \end{aligned}$$

¿El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es linealmente independiente?

1.10 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(**a**) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(**b**) El subconjunto $\left\{1 + 3x - 2x^2, 3 + 5x - 6x^2, -5x + 6x^2\right\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

(**c**) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1.11 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

(**a**) $\mathcal{F} = \{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$. : *calcular el Wronskiano de* $\mathcal{F}$.

(**b**) $\mathcal{G} = \{1 + 3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x), 3 + 5\operatorname{sen}(x) - 6\cos(x), -5\operatorname{sen}(x) + 6\cos(x)\}$.

(**c**) $\tilde{\mathcal{G}} = \{1 + 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x), 4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x), 2 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\}$.

1.12 Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes en su correspondiente espacio vectorial.

(**a**) $\{1 + a\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x), 4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x), a + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\}$ en $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

(**b**) $\left\{1 + 2ax + x^2 + 2x^3, 2 + ax + 4x^2 + 8x^3, x^2 + 2x^3\right\}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

(**c**) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3a+1 & 3 \\ -4 & 3a+1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1.13 [*herramienta*] Explicar por qué los siguientes algoritmos producen una base $\mathcal{B}$ de un subespacio $\mathbb{S}$ a partir de un sistema de generadores $\mathcal{G}$ del mismo.

(a) *Algoritmo espacio filas*:

Algorithm 1 espacio filas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{K}^n$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ cuyas filas son $v_1^T, \dots, v_m^T$
Construir $E \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
Listar las filas no nulas de E: $\{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
$\mathcal{B} \leftarrow \{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
return $\mathcal{B}$

(b) *Algoritmo espacio columnas*:

Algorithm 2 espacio columnas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$
Construir $E \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
Listar las columnas de A que corresponden a las columnas pivotales de E: $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
$\mathcal{B} \leftarrow \{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
return $\mathcal{B}$

1.14 En cada uno de los siguientes casos, hallar dos bases del subespacio generado por el sistema de generadores $\mathcal{G}$: la primera utilizando el *algortimo espacio filas* y la segunda utilizando el *algoritmo espacio columnas.*

(a) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

: *alguno a mano y para ganar tiempo el resto a* .

1.15 Hallar una base y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

(**a**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}$;

(**b**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0,\ p(2) = 0\}$;

(**c**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : 18p(0) = 3p''(0) + 2p'''(0),\ 6p'(0) = 6p''(0) - p'''(0)\}$;

(**d**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0,\ p'(1) = 0,\ p''(1) = 0\}$;

1.16 Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el conjunto

$$\mathcal{B}_a = \left\{ \begin{bmatrix} a & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & a & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T \right\}$$

es una base del subespacio $\mathbb{S}_a = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x_1 - ax_3 + x_4 = 0 \right\}$.

1.17 Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

tiene dimensión 2, comprobar que

(**a**) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq a$, el conjunto de funciones $\left\{e^{ax}, e^{bx}\right\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - (a+b)y' + ab\, y = 0$;

(**b**) para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$;

(**c**) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, el conjunto de funciones

$$\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$$

es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

: *en cada caso, mostrar que la pareja de funciones satisface la ecuación y es linealmente independiente, el remate se obtiene por comparación de dimensiones.*

1.18 En cada uno de los siguientes casos, hallar y graficar la solución $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la ecuación diferencial indicada que satisface las siguientes condiciones: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(**a**) $y'' + 4y = 0$;

(**b**) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

(**c**) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

1.19 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right\}$ y $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$, y sea $b = \begin{bmatrix}1 & -7 & 0\end{bmatrix}^T$.

(**a**) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

(**b**) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ no puede tener una única solución.

1.20 Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & i \\ i & -1\end{bmatrix}.$$

Sea $b = \begin{bmatrix}2-3i \\ 3+2i\end{bmatrix}$, ¿existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

1.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1\end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz A.

(**b**) Sea $b = \begin{bmatrix}3 & 5 & 5 & 7\end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

(**c**) Para $b = \begin{bmatrix}3 & 5 & 5 & 7\end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \operatorname{fil}(A)$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$ pertenecientes a $\operatorname{fil}(A)$.

1.22 Lucas y Monk resolvieron el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix}2 \\ 2\end{bmatrix}.$$

Lucas encontró la solución

$$S_L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T + \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\right\},$$

y Monk la solución

$$S_M = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T + \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

¿Alguno de los dos encontró la solución correcta?

1.23 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\operatorname{rango}(B) = 2$. Hallar una base de $\operatorname{nul}(B)$.

1.24 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

donde $\operatorname{rango}(A) = 3$, y B satisface que

$$B\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}^T.$$

Hallar todas las soluciones del sistema $Bx = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$.

1.25 Sean $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ y determinar el vector de coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}$.

1.26 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$ y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

(**a**) Verificar que $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(**b**) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(**c**) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

1.27 Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ sea $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio de grado $n-1$ definido por

$$p_i(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(**a**) Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. : *para cada polinomio p de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ estudiar el grado y la cantidad de raíces del polinomio*

$$r(x) = p(x) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(**b**) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ es $[p]^{\mathcal{B}_\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)e_i$, donde $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En particular, se tiene que $[x^k]^{\mathcal{B}_\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \cdots & x_n^k \end{bmatrix}^T$.

(**c**) Concluir que dados $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ el polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definido por

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

es el único polinomio de grado menor o igual que $n-1$ tal que su gráfico $\Gamma_p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ contiene al conjunto $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{I}_n\}$.

1.28 En cada uno de los siguientes casos hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1 = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ en la base $\mathcal{B}_2$ y determinar el vector de coordenadas de $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ en la base $\mathcal{B}_2$.

(**a**) $\mathcal{B}_1$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2$ es la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

(**b**) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{B}_2$ es la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$\mathcal{B}_2 = \left\{1 + 2x + x^2, 2 + 5x, 3 + 3x + 8x^2\right\}.$$

(**c**) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathcal{B}_2$ es la base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.29 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\},$$

y sea $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ es

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Hallar el vector de coordenadas de $v = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T$ en base $\mathcal{B}_2$.

1.30 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

(**a**) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ sea

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(**b**) Sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{E}$ en la base $\mathcal{B}_2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^3$ determinar la expresión del vector de coordenadas de x en la base $\mathcal{B}_2$.

1.31 [*miniatura*] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ tales que ninguno contiene al otro. Comprobar que para cualquier pareja de vectores v y w tales que $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ y $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ la recta $\mathbb{L}$ que pasa por w y es paralela a v

$$\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$$

tiene un único punto en común con $\mathbb{S}_1$ y ninguno con $\mathbb{S}_2$. Utilizar este resultado para comprobar que $\mathbb{V}$ no puede ser la unión de dos subespacios propios. En particular, es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro.

1.32 Para las siguientes elecciones de subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$, hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio que los contiene.

(**a**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$
$$\mathbb{S}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(**b**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por $\mathbb{S}_1 := \operatorname{col}(A)$ y $\mathbb{S}_2 := \operatorname{nul}(A)$, donde A es la siguiente matriz de $\mathbb{R}^{5\times 5}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(**c**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}4 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

1.33 [ver **Ejercicio 1.23**] Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\text{rg}(B) = 2$. Hallar una base del subespacio

$$\text{nul}(B) + \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \, x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

1.34 [*miniatura*] Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\right\}, \quad \mathbb{S}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\right\}.$$

Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^2$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.35 Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.36 Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \, -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.
